☆ **6.13.** Wiedząc, że $\sin\alpha - \cos\alpha = m$, oblicz:

a) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$; b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

☆ **6.14.** Oblicz $a = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta$, wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -1$ i $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$.

☆ **6.15.** Udowodnij, że jeśli $a = x\cos\alpha$ i $b = y\sin\alpha$, to $y^2 \cdot a^2 + x^2 \cdot b^2 = x^2 y^2$.

7. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych

7.1. Udowodnij tożsamości:

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$;

b) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

d) $1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$;

e) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$;

f) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;

g) $\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)(\sin x + \cos x) = 2 + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$;

h) $\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right)(\sin x + \cos x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$;

i) $1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

☆ **7.2.** Udowodnij tożsamości:

a) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$;

c) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

d) $(1 + 2\operatorname{tg}\alpha)(2 + \operatorname{tg}\alpha) = 5\operatorname{tg}\alpha + \frac{2}{\cos^2\alpha}$;

e) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

f) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

g) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$;

h) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin^2\alpha$;

i) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;

j) $(1 + \operatorname{ctg}\alpha) \cdot \sin^3\alpha + (1 + \operatorname{tg}\alpha)\cos^3\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha$;