PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

poziom rozszerzony

W każdym z zadań 1 – 4 wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0-1)

Liczba $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)$ jest równa

A. 1. B. –1. C. $5+2\sqrt{6}$. D. $-5-2\sqrt{6}$

Zadanie 2. (0-1)

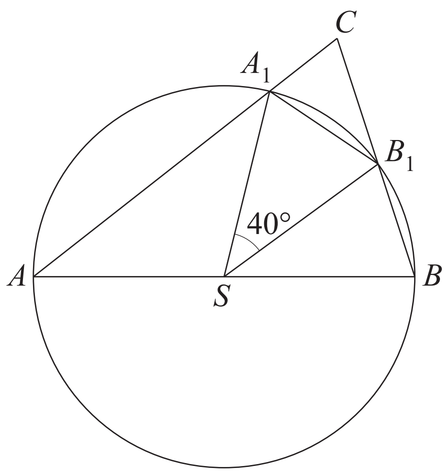
Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n=\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}+\frac{n+2}{2n+1}$ dla $n\geq 1$.

Wtedy

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{2}$. D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$

Zadanie 3. (0-1)

Bok AB trójkąta ostrokątnego jest średnicą okręgu o środku w punkcie S. Okrąg ten przecina boki AC i BC w punktach odpowiednio A_1 i B_1 (zobacz rysunek).



Jeżeli $|\sphericalangle A_1SB_1| = 40°$, to miara kąta ACB wynosi

A. 65°. B. 70°.

C. 75°. D. 80°.

Zadanie 4. (0-1)

Dane są punkty $A = (-4, 1)$, $B = (5, 4)$, $C = (-1, -1)$, $D = (2, 0)$ oraz wektor $\vec{u}=[18, 6]$.
Która z równości jest <u>fałszywa</u>?

A. $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\vec{u}$. C. $\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. D. $\vec{u}=9\overrightarrow{CD}$.

W zadaniu 5 zakoduj we wskazanym miejscu wynik zgodnie z poleceniem.

Zadanie 5. (0-2)

Dane są wielomiany:

$W(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

$P(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^3 + ax^2 + bx + c) + dx + f$.

Wiemy, że $W(x) = P(x)$. Oblicz $d - f$.

Otrzymany wynik zakoduj:

Cyfra		
setek	dziesiątek	jedno**ści**

Zadanie 6. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x + \frac{1}{x}$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Styczne do wykresu tej funkcji są równoległe do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$. Wyznacz współrzędne wszystkich punktów styczności.

Zadanie 7. (0-3)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 5 \geq 0.$$

Zadanie 8. (0-3)

W trójkącie ABC: $|CA| = b$, $|BA| = c$, $|BC| = a$ i $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Udowodnij, że środkowe AD i BE są prostopadłe.

Zadanie 9. (0-4)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym tangens miary kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi wynosi $-\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta dwuściennego tego ostrosłupa między ścianą boczną a podstawą.

Zadanie 10. (0-4)

Rozwiąż równanie $\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Zadanie 11. (0-5)

W każdej z dwóch urn jest pięć kul. W urnie ***A*** są kule z numerami 0, 2, 4, 6, 8, zaś w urnie ***B*** – kule z numerami 1, 3, 5, 7 i 9.

Losujemy jedną kulę z ***B***, zapisujemy liczbę występującą na tej kuli i zwracamy kulę do urny ***B***. Następnie losujemy dwie (bez zwracania) kule zgodnie z niżej zapisanymi warunkami:

- Jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy kulę z numerem 9, to losujemy te dwie kule z ***A***.
- Jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy kulę z numerem 3, to losujemy te dwie kule jedną z ***A*** drugą z ***B***.
- Jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy kulę z numerem różnym od 3 i 9, to losujemy te dwie kule z ***B***.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że iloczyn trzech otrzymanych liczb jest podzielny przez 9?

Zadanie 12. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametrów $p, q \in \boldsymbol{R}$ dla których równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 oraz równanie $x^2 - p^2x + pq = 0$ ma też dwa rozwiązania $x_1 + 1, x_2 + 1$.

Zadanie 13. (0-5)

Wyznacz równania okręgów stycznych do prostych o równaniach $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ i $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ przechodzących przez punkt $A = (3, 2)$.

Zadanie 14. (0-5)

Suma wyrazów nieskończonego szeregu geometrycznego wynosi 39, natomiast suma sześcianów wyrazów tego szeregu jest równa 18252. Wyznacz pierwszy wyraz oraz iloraz tego szeregu.

Zadanie 15 (0-7)

W ostrosłup prawidłowy $ABCDS$ o podstawie kwadratowej został wpisany ostrosłup prawidłowy $EFGHS_1$ tak, że S_1 jest spodkiem wysokości ostrosłupa $ABCDS$ a wierzchołki kwadratu $EFGH$ należą do odpowiednich krawędzi bocznych AS, BS, CS, DS (patrz rysunek). Jaką częścią objętości ostrosłupa $ABCDS$ jest największa objętość ostrosłupa $EFGHS_1$?