PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

poziom rozszerzony

W każdym z zadań 1 – 4 wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0-1)

Dziedziną funkcji $f(x)=\dfrac{1}{\log\left(1-\dfrac{6x+5}{3+2x}\right)}$ jest

A. $R-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

B. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{6}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{2}\right)$

D. $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

Zadanie 2. (0-1)

Tworzymy liczby sześciocyfrowe biorąc sześć różnych cyfr ze zboru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ile jest wśród tych liczb takich, których ostatnia i pierwsza cyfra jest parzysta? Która z poniższych odpowiedzi jest <u>nieprawidłowa</u>?

A. $6!$ B. $\binom{3}{2}\cdot 2!\cdot\binom{5}{4}\cdot 4!$ C. $3!\cdot 5!$ D. $\binom{7}{6}\cdot 6!$

Zadanie 3. (0-1)

Liczba $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ jest równa

A. –8 B. –10 C. $-8\sqrt{2}$ D. $10\sqrt{2}$

Zadanie 4. (0-1)

Ile z podanych niżej równań prostych są równaniami stycznych do wykresu funkcji

$$f(x)=x^3+x^2-x$$

1. $y=1$,
2. $y=-\dfrac{5}{27}$,
3. $y=-x$,
4. $y=4x-3$?

A. dokładnie jedna B. dokładnie dwie C. dokładnie trzy D. 4

W zadaniu 5 zakoduj we wskazanym miejscu wynik zgodnie z poleceniem.

Zadanie 5. (0-2)

Wyznacz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych, które dzielą się przez 6.
Zakoduj trzy cyfry sumy:

Cyfra		
tysięcy	setek	dziesiątek

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 6. (0-3)

Uzasadnij, że $(x + y)(x + y + 2\cos\alpha) + 2 \geq 2\sin^2\alpha$ dla dowolnych $x, y, \alpha \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 7. (0-3)

Udowodnij, że w dowolnym trójkącie ABC

$$h_a = 2p \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Oznaczenia standardowe: α, β, γ miary kątów trójkąta w wierzchołkach odpowiednio A, B, C, $2p$ – obwód trójkąta, h_a – wysokość trójkąta opuszczona z wierzchołka A.

Zadanie 8. (0-4)

Dwaj turyści jednocześnie zaczęli marsz ze stałą prędkością i tą samą trasą. Pierwszy z miejscowości A do miejscowości B, drugi z B do A. Po spotkaniu pierwszy turysta maszerował jeszcze 6 godzin nim dotarł do B. Drugi turysta po spotkaniu maszerował jeszcze 2 godziny i 40 minut nim dotarł do A. Po jakim czasie od rozpoczęcia marszu turyści się spotkali.

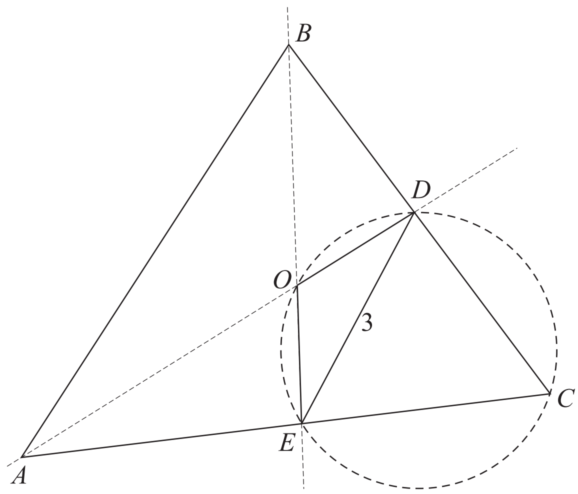
Zadanie 9. (0-4)

Wyznacz cztery liczby takie, że

1. Pierwsze trzy liczby tworzą ciąg geometryczny.
2. Ostatnie trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny.
3. Suma skrajnych liczb wynosi 21.
4. Suma liczb środkowych wynosi 18.

Zadanie 10. (0-4)

W trójkącie ABC dwusieczne AD i BE przecinają się w punkcie O (patrz rysunek). Na czworokącie $CDOE$ można opisać okrąg. Wiedząc, że $|DE| = 3$ wyznacz długości boków trójkąta DEO i kąty tego trójkąta.



Zadanie 11. (0-4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $x^2 - 20x + a = 0$ ma dwa pierwiastki takie, że jeden jest kwadratem drugiego.

Zadanie 12. (0-5)

Dane są dwie urny $\boldsymbol{U_1}$ i $\boldsymbol{U_2}$. W $\boldsymbol{U_1}$ są dwie kule białe i trzy czarne natomiast w $\boldsymbol{U_2}$ trzy białe i dwie czarne. Z $\boldsymbol{U_1}$ losujemy jedną kulę i wrzucamy do $\boldsymbol{U_2}$. Następnie z $\boldsymbol{U_2}$ losujemy też jedną kulę i wrzucamy do $\boldsymbol{U_1}$. Teraz losujemy dwie kule z $\boldsymbol{U_1}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą to kule czarne? Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 13. (0-5)

Rozwiąż równanie $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 14. (0-5)

Wyznacz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, którego objętość wynosi V a ściana boczna nachylona jest do podstawy pod kątem α.

Zadanie 15 (0-7)

Na prostej o równaniu $y = x + 2$ wyznacz współrzędne punktów C i D takich, że stosunek $\frac{|AC|}{|BC|}$ osiąga wartość najmniejszą oraz stosunek $\frac{|AD|}{|BD|}$ osiąga wartość największą, gdzie $A = (0, -4)$, $B = (6, -2)$.