PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

poziom rozszerzony

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W każdym z zadań 1.–5. wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Po usunięciu niewymierności z mianownika ułamka $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-2}$ otrzymamy:

A. $\dfrac{-\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{32}-2}{4}$ B. $\dfrac{-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-2}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt[3]{4}+2}{2}$ D. $\dfrac{-\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}{4}$

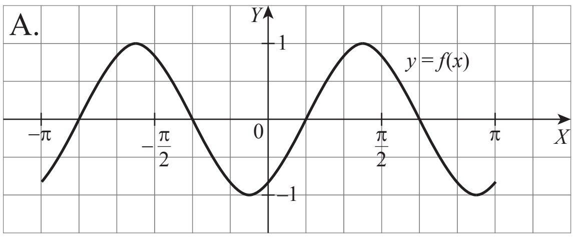
Zadanie 2. (0–1)

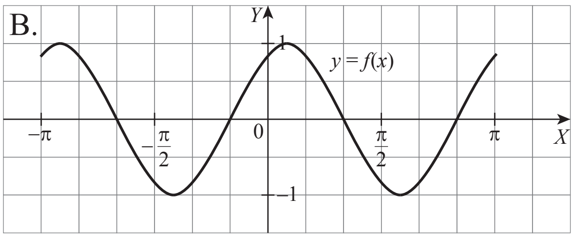
Liczba 234 jest największą liczbą spełniającą nierówność $|m-3x| \le 14$, gdzie m jest parametrem. Zatem m jest liczbą podzielną przez:

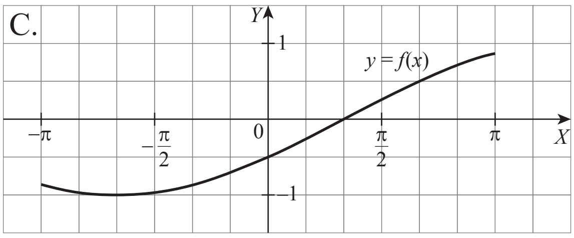
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

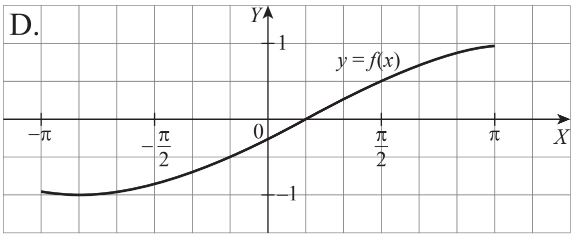
Zadanie 3. (0–1)

Który z poniższych rysunków przedstawia wykres funkcji $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$?









Zadanie 4. (0–1)

Jedno z rozwiązań równania $2x^2 + 9x - 5 = 0$ jest pierwszym wyrazem, zaś drugie ilorazem pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa:

A. -10 B. $\dfrac{1}{12}$ C. $2\dfrac{1}{2}$ D. $-\dfrac{1}{8}$

Zadanie 5. (0–1)

W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 6$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \frac{2}{3}\pi$. Promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. $4\sqrt{2}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

ZADANIA Z KODOWANĄ ODPOWIEDZIĄ

W zadaniach 6. i 7. zakoduj we wskazanym miejscu wynik zgodnie z poleceniem.

Zadanie 6. (0–2)

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{3}{4}n\right)(2n+1)}{3+5+7+\ldots+(2n+1)}$. Zakoduj kwadrat otrzymanej granicy, podając cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego tej liczby.

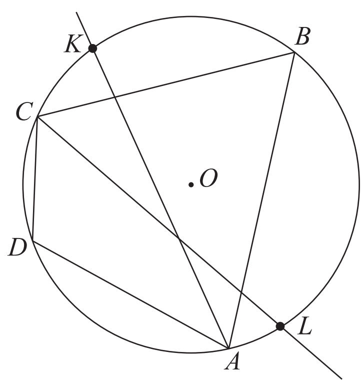
Zadanie 7. (0–2)

Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B \cap A')$, $P(A \cup B) = 0{,}48$ i $P(A \cap B) = 0{,}12$. Oblicz $P(A)$. Zakoduj otrzymany wynik, podając trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 8. (0–3)

Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg $o(O, r)$. Dwusieczna kąta BAD przecina okrąg w punkcie K, zaś dwusieczna kąta BCD przecina okrąg w punkcie L (zobacz rysunek obok). Wykaż, że punkty K, L, O są współliniowe.



Zadanie 9. (0–3)

Napisz w postaci kierunkowej równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta ostrego wyznaczonego przez proste o równaniach k: $y = 0$ oraz l: $y = x$.

Zadanie 10. (0–3)

Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

Zadanie 11. (0–3)

Podstawą ostrosłupa prostego $ABCS$ jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC, w którym przeciwprostokątna AC ma długość $2a$ ($a > 0$). Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość $3a$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 12. (0–4)

Bok AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC. Środkowe AE i BF przecinają się pod kątem prostym. Oblicz $\cos\alpha$, gdzie $\alpha = |\sphericalangle ACB|$.

Zadanie 13. (0–4)

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają warunek $\log_{y-1}(8x - x^2) = 2$.

Zadanie 14. (0–4)

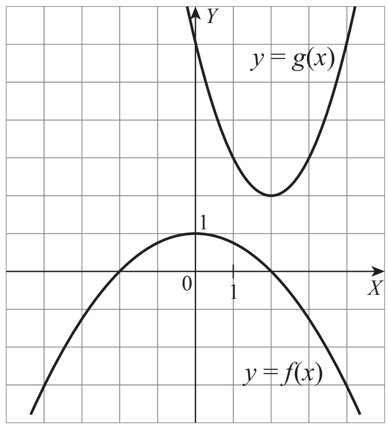
Liczba naturalna jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy trzy ostatnie cyfry tej liczby (tj. cyfry: setek, dziesiątek i jedności) są zerami lub przedstawiają liczbę podzielną przez 8. Ile jest różnych liczb dziesięciocyfrowych podzielnych przez 8, w których zapisie cyfra 0 występuje pięć razy, cyfra 2 występuje cztery razy, a cyfra 4 – jeden raz?

Zadanie 15. (0–5)

Na rysunku obok przedstawione są parabole będące wykresami dwóch funkcji:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \text{ oraz } g(x) = x^2 - 4x + 6.$$

Napisz równania wszystkich wspólnych stycznych do tych parabol.



Zadanie 16. (0–5)

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + (m - 2)x^2 + (8 - m)x - 8$, gdzie parametr m jest liczbą całkowitą. Wyznacz wszystkie te wartości parametru, dla których dany wielomian ma trzy różne pierwiastki x_1, x_2, x_3 spełniające warunek: $\dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} > \dfrac{1}{2}$.

Zadanie 17. (0–7)

W kwadracie $ABCD$ o boku długości 2 zawiera się łuk okręgu o środku w punkcie A i promieniu AB. Rozważamy wszystkie odcinki spełniające jednocześnie dwa warunki:

1) Odcinek jest styczny do danego łuku w dowolnie wybranym na tym łuku punkcie E ($E \neq B$ i $E \neq D$).
2) Jeden koniec odcinka należy do boku BC, zaś drugi do boku DC.

Wykaż, że najkrótszy odcinek spełniający warunki zadania ma długość $4\left(\sqrt{2} - 1\right)$.