PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

poziom rozszerzony

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W każdym z zadań 1 – 4 wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0-1)

O liczbach rzeczywistych dodatnich a, b, x wiadomo, że $\log_2 x = a$ i $\log_6 x = b$.
Wtedy $\log_3 x$ jest równy

A. $b - a$ **B**. $\frac{1}{a-b}$ **C**. $\frac{b}{a}$ **D**. $\frac{ab}{a-b}$

Zadanie 2. (0-1)

Liczba $\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$ jest równa

A. $\sqrt[6]{32}$ **B**. $\sqrt[6]{6}$ **C**. $\sqrt[5]{8}$ **D**. $\sqrt[6]{8}$

Zadanie 3. (0-1)

Dane są funkcje: $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{1\}$, $g(x) = x^2 - 1$.

Wtedy $f'\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot g\left(\sqrt{2}-1\right) + f\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot g'\left(\sqrt{2}-1\right)$ jest równe

A. $\sqrt{2}+1$ **B**. $\sqrt{2}-1$ **C**. $2\sqrt{2}-1$ **D**. $2\sqrt{2}+1$

Zadanie 4. (0-1)

Liczba $\frac{\cos 20° + \sqrt{3}\sin 20°}{4\cos 40°}$ jest równa

A. 1 **B**. $\frac{1}{2}$ **C**. $\frac{1}{4}$ **D**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ZADANIE OTWARTE z kodowaną odpowiedzią

W zadaniu 5 zakoduj we wskazanym miejscu wynik zgodnie z poleceniem.

Zadanie 5. (0-2)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2^{n+2} \cdot a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$.

Oblicz a_3.
W poniższe kratki wpisz kolejno cyfry otrzymanego wyniku.

Cyfra		
setek	dziesiątek	jedności

ZADANIA OTWARTE

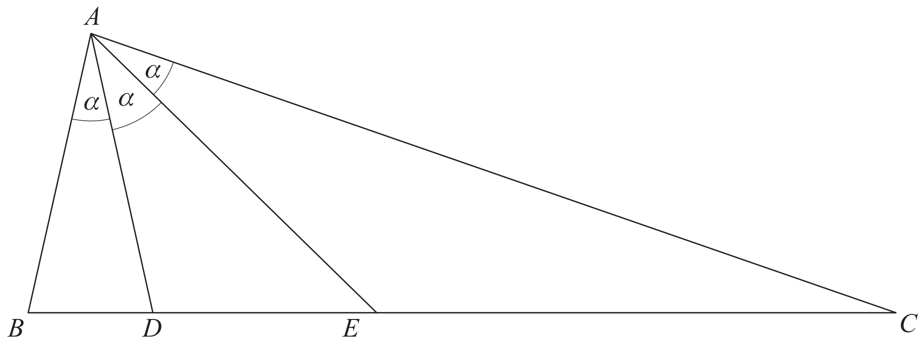
Zadanie 6. (0-3)

Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$\left(a^3 + b^3\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \left(a + b\right)^2$.

Zadanie 7. (0-3)

W trójkącie ABC odcinki AD i AE dzielą kąt $\sphericalangle BAC = 3\alpha$ na trzy równe części (patrz rysunek) oraz $|AC| = 3|AB|$.



Uzasadnij, że $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{2\cos\alpha + 3}{6\cos\alpha + 1}$.

Zadanie 8 (0-3)

Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$ wiedząc, że (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 9. (0-4)

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 4x^3 - x|x - 2|$ w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.

Zadanie 10. (0-4)

W trapezie równoramiennym $ABCD$ dane są długości podstaw $|AB| = 13$ i $|CD| = 3$ oraz długość przekątnej $|BD| = 10$. Oblicz długość ramienia AD oraz długość promienia okręgu opisanego na tym trapezie.

Zadanie 11. (0-4)

W trójkącie równoramiennym ABC ($|BA|) = |BC|$), punkt E należy do boku BC i do dwusiecznej kąta BAC, natomiast AD jest środkową w tym trójkącie. Oblicz pole trójkąta ADE wiedząc, że i $|AC| = 6$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 30°$.

Zadanie 12. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie

$$\big(|x - 2a| - 3\big)(x^2 + ax - x - a) = 0$$

ma dokładnie trzy różne rozwiązania.

Zadanie 13. (0-5)

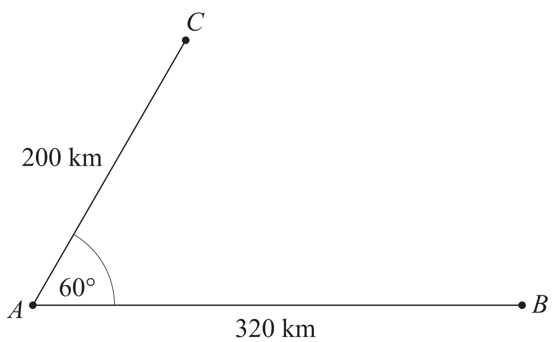
Rozwiąż równanie $\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) - 3\cos\left(x - \frac{7}{2}\pi\right) = 1 + 4\sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 14 (0-6)

W ostrosłupie $ABCS$ spodkiem wysokości ostrosłupa SO jest punkt O, który jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta ABC i wysokości AD podstawy ABC ostrosłupa.
Oblicz objętość ostrosłupa wiedząc, że $|AB| = 15$, $|AC| = 13$, $|BC| = 14$, $|BS| = 10{,}5$.

Zadanie 15 (0-7)

Trzy miejscowości A, B, C położone są tak jak na rysunku i połączone prostymi drogami.



Z miejscowości C i A wyruszają jednocześnie samochody. Samochód z C jedzie do miejscowości A **z prędkością** 50 km/h. Samochód z A jedzie do miejscowości B **z prędkością** 80 km/h. Jaka będzie najmniejsza między nimi odległość w linii prostej?